

Ejercicios Unidad 3

Probabilidad I 2026-1

Entrega: martes 18 de noviembre

1. Se tiene la siguiente distribución conjunta de dos variables aleatorias X e Y , donde la probabilidad conjunta $\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$ está dada por la siguiente matriz:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3
x_1	0.10	0.10	0.05
x_2	0.05	0.20	0.10
x_3	0.05	0.15	0.20

Calcule:

- a) Las funciones de masa de probabilidad marginales f_X y f_Y .
 - b) La función de masa de probabilidad de $Z = X + Y$.
 - c) La esperanza de X , Y y $X + Y$.
 - d) La varianza de X , Y y $X + Y$.
2. Sea el vector aleatorio (X, Y) con distribución conjunta dada por

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = c(i + j),$$

para $i, j \in \{0, 1, 2\}$ y c una constante de normalización.

- a) Determine el valor de c .
 - b) Calcule las distribuciones marginales de X y Y .
 - c) ¿Son X y Y independientes?
3. Sean X e Y variables aleatorias discretas con función de masa conjunta:

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & (x, y) \in \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- a) Calcule $\mathbb{P}(X = Y)$.
 - b) Calcule $\mathbb{P}(X < Y)$ y $\mathbb{P}(X > Y)$.
 - c) Determine si X y Y son independientes.
4. Responda los siguientes problemas relacionados con el cálculo de cuantiles.

- a) Encontrar los cuartiles de una variable aleatoria que sigue una distribución uniforme continua $\text{Unif}(a, b)$.
 - b) Determinar la mediana o medianas de una variable aleatoria con distribución binomial $\text{Bin}(n, p)$ y grafique el caso $n = 5, p = 1/2$.
 - c) Calcular el percentil 95 de una distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$.
5. Se tiene el siguiente conjunto de datos correspondiente al tiempo (en minutos) que tarda un servidor en procesar solicitudes:

$\{10, 12, 15, 13, 11, 14, 15, 12, 13, 14, 10, 16, 15, 11, 13\}$

- a) Grafique la función de distribución empírica de los datos.
 - b) Calcule la mediana y el primer cuartil.
6. Una muestra de 20 observaciones de la variable “tiempo de respuesta” (en segundos) se resume en la siguiente tabla:

Tiempo	1	2	3	4
Frecuencia	3	7	6	4

- a) Construya la función de distribución empírica acumulada.
 - b) Encuentre la mediana empírica.
7. En un experimento, se lanzan 20 monedas justas. Definimos la variable aleatoria X como el número de águilas obtenidas en los 20 volados, es decir $X \sim \text{Bin}(100, 0.5)$.

Calcule la probabilidad de obtener entre 40 y 50 águilas de las siguientes maneras:

- a) Utilizando la distribución binomial exacta.
 - b) Aproximando la binomial mediante una distribución normal
 - c) Utilizando la aproximación Poisson
 - d)Cuál de las dos aproximaciones es mejor?
8. En una fábrica, la probabilidad de que un producto salga defectuoso es $p = 0.02$. Se produce un lote de $n = 50$ productos y definimos la variable aleatoria X como el número de productos defectuosos en el lote, es decir $X \sim \text{Bin}(50, 0.02)$.

Calcule la probabilidad de que haya 2 o menos productos defectuosos de las siguientes maneras:

- a) Utilizando la distribución binomial exacta.
 - b) Aproximando la binomial mediante una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = np$.
9. En una planta automotriz, la longitud de una pieza específica tiene una media de $\mu = 15$ cm y una desviación estándar de $\sigma = 0.4$ cm. Para verificar la calidad, se toma una muestra aleatoria de $n = 25$ piezas.

- a) Usando el Teorema del Límite Central, aproxima la distribución de la media muestral $\bar{X}$.

- b) ¿Cuál es la probabilidad de que la media de la muestra esté entre 14.9 cm y 15.1 cm?
10. Una empresa de mensajería está evaluando el tiempo de entrega de sus paquetes. Se sabe que el tiempo de entrega tiene una media de $\mu = 48$ horas y una desviación estándar de $\sigma = 12$ horas. Se toma una muestra aleatoria de $n = 36$ envíos.
- a) Usa el Teorema del Límite Central para aproximar la distribución del tiempo medio de entrega.
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de entrega de la muestra sea superior a 50 horas?
11. Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes con distribución $\text{Exp}(\lambda)$. Encuentre la distribución de $X_1 + X_2$.
12. Sea $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ y sea $Y = \lfloor X \rfloor$ la parte entera (función piso) de X .
- a) Exprese $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(k \leq X < k + 1)$ en términos de la función de distribución de X .
- b) Calcule explícitamente $\mathbb{P}(Y = k)$ y muestre que
- $$\mathbb{P}(Y = k) = (1 - e^{-\lambda})e^{-k\lambda}\mathbf{1}_{\mathbb{N}_0}(k).$$
- c) Concluya que $Y \sim \text{Geom}(1 - e^{-\lambda})$.
13. Calcule la densidad de las siguientes variables aleatorias definidas como transformaciones de variables con distribución conocida. En cada caso, indique si la distribución obtenida corresponde a una distribución clásica o conocida.
- a) Sea $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$. Calcule la distribución de $Y = \sqrt{X}$.
- b) Sea $X \sim \text{Pareto}(1, \lambda)$. Calcule la distribución de $Y = \log(X)$.
- c) Sea $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Calcule la distribución de $Y = e^{-\lambda X}$.
14. Sean $X \sim \chi_1^2$ y $Y \sim \chi_1^2$, dos variables aleatorias independientes. Demuestre que la variable aleatoria $W = X + Y$ tiene distribución χ_2^2 .
15. Sea $X \sim \text{Exp}(\lambda)$
- a) Calcule la función de densidad de $Y = 1/X$.
- b) Calcule, si existe, $\mathbb{E}(Y)$.
16. Una fábrica produce tornillos cuyo peso (en gramos) puede modelarse como una variable aleatoria con media $\mu = 5$ y desviación estándar $\sigma = 0.4$. Se toma una muestra aleatoria de 25 tornillos. Use el Teorema Central del Límite para estimar la probabilidad de que el peso promedio de la muestra esté entre 4.9 y 5.1 gramos.